Tentamen Talen en Automaten

27 november 2001, 13.00–16.00 uur, Tennishal

Schrijf met blauwe of zwarte pen; *niet* met potlood en *niet* met rode pen. Voorzie alle bladen van je naam. Nummer de bladen en vermeld op het eerste blad het totale aantal.

Werk netjes. Formuleer je antwoorden zo compleet en tevens zo beknopt mogelijk. Je mag — tenzij expliciet anders aangegeven staat — direkt een beroep doen op (1) de stellingen uit het dictaat (*mits je ze goed formuleert*), (2) indien van toepassing: een (al dan niet bewezen) resultaat uit een eerder onderdeel van de opgave in kwestie.

Opgave 1.

(i) Zij G een grammatica, $G = (N, T, P, S)$. Reproduceer in detail de definitie van de taal $\mathcal{L}(G)$. (Reproduceer hierbij ook de onderliggende hulpdefinities.)

(ii) Wanneer heet een taal L *recursief*?

(iii) Wanneer heet een taal L *recursief opsombaar*?

Opgave 2.

(i) Toon aan dat de volgende taal $L \subseteq \{a\}^*$ *niet* contextvrij is:

$$L = \{\, a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } n \text{ is een kwadraat} \,\}$$

(ii) Beargumenteer — zonder al te zeer in detail te treden — dat deze taal L wel recursief is.

Opgave 3. Zij $L \subseteq \{0, 1\}^*$ de taal van alle strings van alternerende 0-en en 1-en. (Dus L bevat bijvoorbeeld de strings 0101 en 10101, maar niet de string 0110. N.B.: de lege string behoort ook tot L.)

(i) Geef een reguliere expressie voor de deeltaal L_0 van L bestaande uit alle $w \in L$ die beginnen met 0 en eindigen op 1.

(ii) Geef een reguliere expressie voor de deeltaal L_1 van L bestaande uit alle $w \in L$ die beginnen met 1 en ook eindigen op 1.

(iii) Geef een reguliere expressie voor de hele taal L.

(iv) Ga na hoe deze reguliere expressie voor L eventueel nog wat te vereenvoudigen is op basis van de rekenregels voor reguliere expressies.

Z.O.Z.

Opgave 4. Zij n één of ander positief natuurlijk getal. Laat de verzameling K uit de $n+1$ toestanden $k_0, \ldots, k_n$ bestaan. Definiëer de NFSA M door:

$$M = (K, \{0,1\}, t, k_0, \{k_n\}),$$

waarbij $t(k_0, 0) = \{k_0\}$, $t(k_0, 1) = \{k_0, k_1\}$, waarbij voor alle $i \in \mathbb{N}$ met $0 < i < n$

$$t(k_i, 0) = t(k_i, 1) = \{k_{i+1}\}$$

en waarbij voorts: $t(k_n, 0) = t(k_n, 1) = \emptyset$.

(i) Geef een inzichtelijke grafische voorstelling van M.

(ii) Geef een inzichtelijke karakterisering van de gedaante van de strings uit de taal $\mathcal{T}(M)$. (Een gedetailleerd bewijs van de correctheid van die karakterisering wordt hier niet gevraagd. Je mag volstaan met een korte intuïtieve uitleg.)

(iii) Beschrijf hoe M te transformeren is in een equivalente DFSA M'.

Opgave 5. Definiëer de taal $L \subseteq \{a, b\}^*$ door:

$$L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

(i) Construeer een NPDA M met de eigenschap dat $\mathcal{N}(M) = L$. Geef een (korte) inzichtelijke uitleg van je constructie.

(ii) Bewijs dat L contextvrij is.

(iii) Bewijs dat L niet regulier is. Je mag hier volstaan met een globale beschrijving van de structuur van het bewijs, zonder invulling van de verdere details.

Opgave 6. Zij M een DFSA, $M = (K, T, t, k_0, F)$. Veronderstel hierbij, dat de overgangsfunctie t totaal is. Definiëer de relatie $\sim$ op K door:

$$k \sim k' \iff \forall x \in T^* (t'(k, x) \in F \Leftrightarrow t'(k', x) \in F),$$

waarbij t' de met t corresponderende functie van $K \times T^*$ naar K is.

(i) Reproduceer de definitie van t'.

(ii) Toon aan dat $\sim$ een equivalentierelatie is op K.

(iii) Toon aan dat $\sim$ bovendien de volgende eigenschap heeft:

$$\forall k, k' \in K \, \forall a \in T (k \sim k' \Rightarrow t(k, a) \sim t(k', a))$$

(iv) Veronderstel dat elke toestand van M bereikbaar is vanuit de starttoestand. (Hierbij betekent "bereikbaar": *bereikbaar via t'*.) Er bestaat een standaardmethode voor de transformatie van M in een equivalente minimale DFSA M'. Welke rol speelt $\sim$ in dat verband?